Тема 9. Матрицы и определители

Матрицы. Пусть m и n – натуральные числа.

Матрицей размера m $\times$ n называется прямоугольная таблица чисел a_{ij} из m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \; i = 1\dots m,\; j = 1,\dots,n.$$

Здесь m – число строк в матрице A; i – номер строки ($1 \le i \le m$); n – число столбцов; j – номер столбца ($1 \le j \le n$); a_{ij} – элемент матрицы A, находящийся в i–й строке и j–м столбце. Матрицу A удобно обозначать $(a_{ij})_{mn}$.

Две матрицы $A = (a_{ij})_{mn}$ и $B = (b_{ij})_{pq}$ называются равными, если $m = p$, $n = q$, $a_{ij} = b_{ij}$ для всех значений i,j.

Матрица размера $1 \times n$ называется матрицей-строкой, матрица размера $m\times 1$ называется матрицей-столбцом. Матрица $A = (a_{ij})_{mn}$ называется квадратной порядка n, если число строк равно числу столбцов (m = n). Квадратная матрица E порядка n называется единичной, если у неё на главной диагонали стоят единицы, а на всех остальных местах – нули:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица A^T, полученная из данной матрицы A заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется транспонированной относительно A.

Сложение матриц и умножение их на число.

Пусть $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ матрицы размера $m\times n$.

<u>*Суммой* матриц</u> A и B называется матрица C, для которой

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \qquad (1)$$

где $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ (то есть, чтобы сложить две матрицы, нужно сложить их соответствующие элементы).

<u>Произведением матрицы A на число α</u> называется матрица $\alpha A = (\alpha a_{ij})_{mn}$ (то есть, чтобы умножить матрицу на число, нужно каждый элемент этой матрицы умножить на это число).

Пример 1. Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Вычислить матрицу $4A + 5B - 2B^T$.

Решение. Чтобы умножить матрицу на число, нужно каждый элемент этой матрицы умножить на это число. Чтобы сложить матрицы одинаковых размеров, нужно сложить одноименные элементы этих матриц,

$B^\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ – матрица, транспортированная к матрице B. Тогда

$$4A + 5B - 2B^{\tau} = \begin{pmatrix} 12 & 8 & -20 \\ 4 & 4 & 8 \\ 8 & -4 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 0 & 15 & 5 \\ 15 & 5 & 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & -6 \\ -4 & -6 & -2 \\ -4 & -2 & -8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 15 & 18 & -16 \\ 0 & 13 & 11 \\ 19 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Произведение матриц.

Пусть A = $(a_{ij})_{mn}$ и B = $(b_{ij})_{pq}$. Произведение матриц существует, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы. Перемножаются матрицы A и B по правилу: i-я строка первой матрицы A умножается скалярно на j - й столбец матрицы B, и полученное число Cij записывается в j - й столбец на i - е место искомой матрицы C:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} \quad . \qquad (2)$$

Свойства произведения матриц:

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C.$
2. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$

Произведение матриц, вообще говоря, не коммутирует, т. е. $A \cdot B$ не всегда равно $B \cdot A$.

Пример 2. Даны две матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & 5 & 7 & -8 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \\ 6 & -3 \\ 7 & -7 \end{pmatrix}.$$

Найти произведение AB. Можно ли получить произведение BA?

Решение. Число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B, поэтому произведение AB определено. Умножая строку матрицы A на столбец матрицы B, по формуле (2) получаем

$$AB = \begin{pmatrix} 1\cdot 4 + 1\cdot 5 + 2\cdot 6 + (-4)7 & 1(-1) + 1(-2) + 2(-3) + (-4)(-7) \\ 1\cdot 4 + 5\cdot 5 + 7\cdot 6 + (-8)7 & 1(-1) + 5(-2) + 7(-3) + (-8)(-7) \\ 1\cdot 4 + 0\cdot 5 + 1\cdot 6 + (-2)\,7 & 1(-1) + 0(-2) + 1(-3) + (-2)(-7) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12+5+12-32 & -3-2-6+28 \\ 24+25+42-64 & -6-10-21+56 \\ 36+0+6-16 & -9+0-3+14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 17 \\ 27 & 19 \\ 26 & 2 \end{pmatrix}.$$

Произведение BA не определено, так как число столбцов матрицы B не равно числу строк матрицы A.

Целой положительной степенью A^K (**к** > 1) квадратной матрицы A называется произведение к матриц, каждая из которых равна A.

Многочленом степени **к** (**к** – целое неотрицательное число) от квадратной матрицы A называется выражение вида

$$a_k A^k + a_{k-1}A^{k-1} + \ldots + a_2 A^2 + a_1 A + a_0 E$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Пример 3. Найти P(A), если $P(x) = x^2 - 3x + 5$ и .

Решение. В соответствии с определением многочлена от матрицы $P(A) = a_k A^k + a_{k-1}A^{k-1} + \ldots + a_2 A^2 + a_1 A + a_0 E$ получаем $P(A) = A^2 - 3A + +5E$ или

$$P(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} +$$

$$+5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -10 & 21 \end{pmatrix}.$$

Определители. Определителем квадратной матрицы 2-го порядка называется число

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Определителем квадратной матрицы 3-го порядка называется число

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{23}a_{31} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Минором какого-либо элемента определителя называется определитель, полученный из данного вычеркиванием той строки и того столбца, которым принадлежит данный элемент.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ik} определителя называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+k}$.

Свойства определителей:

– если поменять местами две соседние строки определителя, то он изменит знак;

– если две строки равны, то он равен нулю;

– если поменять местами строку и соответствующий столбец, то определитель не изменится;

– если все элементы некоторой строки умножить на одно и то же число, то определитель умножится на это число;

– если соответствующие элементы двух строк определителя пропорциональны, то он равен нулю;

– если каждый элемент некоторой строки определителя представлен в виде суммы двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, у которых все строки, кроме указанной, прежние, а в данной строке в первом определителе стоят первые, а во втором вторые слагаемые;

– при прибавлении к элементам любой строки соответствующих элементов какой-либо другой строки, умноженных на одно и то же число, величина определителя не изменится;

– определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки на их алгебраические дополнения.

Данные свойства можно сформулировать и для столбцов матрицы.

Пример 4. Вычислить определитель третьего порядка тремя способами: 1) по определению; 2) разложить по элементам 1-й строки;
3) преобразованием его с помощью свойств определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 6 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

Решение:

1. $\Delta = 1\cdot 6\cdot 2 + 2(-1)(-1) + 2\cdot 5(-4) - (-4)6\cdot(-1) - 2\cdot 2\cdot 2 - 1\cdot 5(-1) = -53.$

2. Раскладываем по элементам 1-й строки

$$\Delta = 1\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 1(12+5) - 2(4-1) - 4(10+6) =$$
$$= -53.$$

3. Умножая первую строку на (-2) и прибавляя ко второй, затем первую строку прибавляем к третьей, получаем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 6 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 7 & -2 \end{vmatrix}.$$

Разлагая этот определитель по элементам первого столбца, находим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 49 = -53.$$

Обратная матрица. Матрицей, обратной квадратной матрице A, называется квадратная матрица A^{-1}, удовлетворяющая равенствам

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

где E – единичная матрица.

Квадратная матрица называется невырожденной, если ее определитель отличен от нуля. Всякая невырожденная квадратная матрица имеет единственную обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A.

Пример 5. Вычислить обратную матрицу для матрицы $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 2 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

Решение:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{vmatrix}.$$

:

Разложим по элементам 1-й строки:

$$\Delta = 4\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 4\cdot(5\cdot(-2) - (-3)\cdot 6) + 3\cdot(2\cdot(-2) - (-3)\cdot 5) +$$
$$+ 2\cdot(2\cdot 6 - 5\cdot 5) = 39,$$

так как $\Delta \neq 0$, то матрица невырожденная и имеет обратную.

Для нахождения обратной матрицы A^{-1} вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы А:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 8, \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -11, \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -13,$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 6, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -18, \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -39,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -1, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 16, \qquad A_{33} = -\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 26.$$

Обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{39}\begin{pmatrix} 8 & 6 & -1 \\ -11 & -18 & 16 \\ -13 & -39 & 26 \end{pmatrix}.$$

Вопросы для самопроверки.

1. Что называется матрицей? Как определяются линейные операции над матрицами и каковы их свойства? Приведите примеры.
2. Какая матрица называется обратной для данной матрицы? Всегда ли она существует? Как можно найти обратную матрицу?
3. Что называется определителем? Каковы основные свойства определителей?
4. Что называется минором и алгебраическим дополнением? Приведите примеры.
5. Каковы способы вычисления определителей? Приведите примеры.